002

Königliches Gymnasium zu Deutsch-Krone.

Wissenschaftliche Beilage

zum Jahresbericht 1899/1900.

Kegelschnittaufgaben in geometrischer Behandlung

von

Franz Frech.

Mit einer Figurentafel.

KÖNIGLICHES STAATSARCHIV ZU DANZIG

Deutsch-Krone.
Druck der P. Garms'schen Buchdruckerei (F. Garms).
1900.

1900. Nr. 28.

mvimw.
2377p

Kegelschnittaufgaben in geometrischer Behandlung.

Durch die Lehrpläne vom Jahre 1892 ist den Lehrern der Mathematik in Prima die geometrische Behandlung von Kegelschnittaufgaben zur Pflicht gemacht worden. Bekannt ist, daß Kambly 1873 in seinem Referat für die schlesische Direktorenkonferenz ausführte, daß die Kegelschnitte in synthetischer Behandlung zu schwerfällig oder zu schwer seien. Bekannt ist auch, daß dieser Ausspruch des berühmten Mathematikers zum Widerspruch herausforderte und zur Folge hatte, daß eine Reihe von Büchern erschien, welche das Gegenteil beweisen sollten. Eines dieser Werke: „Erler, die Elemente der Kegelschnitte in synthetischer Behandlung" löst die Frage sehr geschickt. Die Sätze lassen sich leicht ableiten, und nach kurzer Zeit kann man Aufgaben daran schließen. Ich habe aus der großen Anzahl von Sätzen mich auf wenige beschränkt und habe dann folgenden Weg eingeschlagen. Wenn die mir genügende Anzahl von Parabelsätzen abgeleitet war, so ließ ich die Schüler auf einem halben Bogen eine große, deutliche Figur zeichnen, und am Rande wurden dann, wie in Figur I, die Sätze und Erklärungen kurz dazugeschrieben. Mit Benutzung dieser Figur wurden Aufgaben gelöst, d. h. es wurde zunächst die Aufgabe allgemein besprochen. Dann wurde der Beweis versucht. Wie immer bei geometrischen Aufgaben so zeigte sich auch hier, daß der Beweis die größten Schwierigkeiten macht. Jeder meiner Herren Collegen wird wie ich gefunden haben, daß selbst schwache Schüler eine Analysis und eine Konstruktion fehlerlos hinschreiben können, daß aber die logische Schlußfolgerung im Beweise häufig zu wünschen übrig läßt. Die geometrischen Aufgaben sollen leicht lösbar sein, sie sollen, wenn irgend möglich, mehrere Lösungen zulassen. Freilich kommt es häufig vor, daß ein strenger Beweis sich nur bei einer Konstruktion führen läßt. Auf den Beweis verzichten, ihn den Schülern erlassen, hieße den besten Theil der Lösung aufgeben, denn hier besonders kann der Schüler seine mathematische Schulung zeigen. Der Gang der Auflösung verlief daher meistens so, daß von den Schülern die verschiedenen Konstruktionen gefunden wurden; der eine fand die eine, ein anderer eine zweite u. s. w., und dann kam es darauf an, welche Konstruktion einen zwingenden Beweis zuließ. War diese gefunden, so wurde die Analysis ausgesprochen. Hieß die Aufgabe: Eine Parabel zu zeichnen aus der Lage der und der Punkte oder der und der Linien, so wurde die Aufgabe fast immer auf die Lösung der Aufgabe: Eine Parabel aus der Lage des Brennpunktes und der Leitlinie zu zeichnen, zurückgeführt. Ebenso verfuhr ich bei der Auflösung von Ellipsen- und Hyperbel-Aufgaben, wobei bei ihrer Zeichnung die Analysis mit der Zurückführung auf die Aufgabe: Eine Ellipse oder eine Hyperbel aus der Lage der Brennpunkte F und F^1 und der Endpunkte der großen resp. ersten Achse A und A^1 zu zeichnen, abschloß. Die Konstruktion wurde stets durchgeführt,

und zwar wurden die Kurven anfangs durch Festlegung einer größeren Anzahl von Kurvenpunkten gezeichnet, später aus freier Hand. Bei den häuslichen Arbeiten und der schriftlichen Abiturientenprüfung mußten sie mit Tinte nachgezogen werden. Die ersten Zeichnungen entwarf ich selbst an der Tafel, zu den späteren wurden die Schüler herangezogen; jeder mußte mitzeichnen. Natürlich sahen die ersten mit freier Hand gezeichneten Kurven nicht gerade schön aus, aber bei der fortwährenden Übung wurden sie bald besser. Der Beweis wurde dann zum Schluß noch einmal wiederholt. Hatten die Schüler erst Übung im Entwerfen der Kurven, so wurden die Figuren I, II und III nicht mehr benutzt; sie wurden von selbst überflüssig, da sich durch die Übung die Sätze vollkommen eingeprägt hatten. Von Interesse waren hierbei auch Dreiecksaufgaben, bei welchen die eine Seite und die Summe oder Differenz der beiden andern Seiten, die Summe oder Differenz der beiden nicht zugehörigen Mittellinien gegeben waren. War die Summe gegeben, so war der eine geometrische Ort für die dritte Ecke des Dreiecks eine Ellipse, war die Differenz gegeben, so war er eine Hyperbel. Bei beiden Kurven waren A und A^1, F und F^1 bekannt. Wenn man die Zeit gehörig ausnutzt, so wird man von Ostern bis zu den Sommerferien mit dem Pensum fertig. Ich will nun Auflösungen von Aufgaben bei jeder Gruppe als Schema folgen lassen und dann die übrigen nur kurz erwähnen; bei einigen befindet sich eine Anwendung der harmonischen Teilung und der Konstruktion algebraischer Ausdrücke. Die Aufgaben sind alle erprobt und zum großen Teil leicht zu lösen. In der Aufgabenstellung gebrauche ich Abkürzungen, deren Erklärung ich wohl übergehen kann.

I. Parabelaufgaben.

Figur I.

1. Eine Parabel zu zeichnen aus der Lage des Brennpunktes und der zwei Parabelpunkte. (F, P und P^1.)

Analysis. F sei der Brennpunkt und L die Leitlinie der gesuchten Parabel, von welcher ich die Lage von F und der Kurvenpunkte P und P^1 kenne. Fälle ich von P und P^1 die Lote auf die Leitlinie, so ist $PF = PC$ und $P^1F = P^1C^1$. Schlage ich also um P mit PF und um P^1 mit P^1F die Kreise, so berühren sie die Leitlinie. Ziehe ich an die Kreise die gemeinschaftliche Tangente, so ist die Leitlinie L bekannt. Aus der Lage von F und L kann ich die Parabel zeichnen.

Konstruktion. Ich verbinde F mit P und P^1; ich schlage um P mit PF und um P^1 mit P^1F Kreise. Ich ziehe an beide Kreise die gemeinschaftliche Tangente und nenne sie L. Aus F als Brennpunkt und L als Leitlinie zeichne ich die Parabel.

Beweis. Nach Konstruktion ist F der Brennpunkt und L die Leitlinie der gezeichneten Parabel. Den Berührungspunkt C verbinde ich mit P. Der Radius nach dem Berührungspunkte einer Tangente gezogen steht auf ihr senkrecht, folglich PC senkrecht auf L. $PC = PF$ als Radien desselben Kreises, folglich P ein Parabelpunkt. Ich verbinde P^1 mit dem Berührungspunkte C^1; dann ist P^1C^1 senkrecht auf L und $P^1C^1 = P^1F$, folglich P^1 ein Parabelpunkt.

2. Eine Parabel zu zeichnen aus der Lage des Brennpunktes, eines Kurvenpunktes und der einen Tangente. (F, P^1, T.)

Lösung. Ich fälle von F auf T das Lot und verlängere es um sich selbst, wodurch ich C erhalte. Ich schlage um P^1 mit P^1F den Kreis und ziehe von C an ihn die Tangente, wodurch ich L erhalte.

3. Eine Parabel zu zeichnen aus der Lage des Brennpunktes und der zweier Tangenten. (F, T und T^1.)

Lösung. Ich fälle von F auf T und T^1 die Lote und verlängere sie um sich selbst, wodurch ich C und C^1 und hiermit L erhalte.

4. Eine Parabel zu zeichnen aus der Lage des Brennpunktes und der eines Durchmessers mit seinem Scheitel. (F, Lage von PC mit P.)

Lösung. Ich schlage PF = PC ab und errichte auf PC in C das Lot L.

5. Eine Parabel zu zeichnen aus der Lage des Brennpunktes und der einer Tangente mit ihrem Berührungspunkte. (F, T mit P.)

Lösung. Ich fälle von F das Lot auf T und verlängere es um sich selbst bis C. Ich verbinde C mit P und errichte auf PC in C das Lot L.

6. Eine Parabel zu zeichnen aus der Länge des Parameters, der Lage des Brennpunktes und der eines Parabelpunktes. (p, F, P.)

Lösung. Ich schlage um P mit PF den Kreis und um F mit p. Ich ziehe an beide Kreise die gemeinschaftliche Tangente und erhalte L.

7. Eine Parabel zu zeichnen aus der Lage der Leitlinie und der zweier Parabelpunkte. (L, P und P^1.)

Lösung. Ich fälle von P und P^1 die Lote PC und P^1C^1 auf L und schlage um P mit PC und um P^1 mit P^1C^1 Kreise, wodurch ich F erhalte.

8. Eine Parabel zu zeichnen aus der Lage der Leitlinie und der einer Tangente mit ihrem Berührungspunkte. (L, T mit P.)

Lösung. Ich fälle von P auf L das Lot PC. Ich fälle von C auf T das Lot und verlängere es um sich selbst, wodurch ich F erhalte.

9. Eine Parabel zu zeichnen aus der Lage der Leitlinie, der Scheiteltangente und einer Tangente. (L, N und T.)

Lösung. Durch die Lage der Scheiteltangente N und der Tangente T ist D bekannt. Ich errichte auf T in D das Lot und erhalte C. Ich verlängere CD um sich selbst und erhalte F.

10. Eine Parabel zu zeichnen aus der Länge des Parameters, der Lage der Leitlinie und der eines Parabelpunktes. (p, L, P.)

Lösung. Ich fälle von P auf L das Lot und erhalte C. Ich schlage um P mit PC den Kreis und ziehe im Abstande von p zu L die Parallele, wodurch ich F erhalte.

11. Eine Parabel zu zeichnen aus der Länge des Parameters, der Lage der Leitlinie und der einer Tangente. (p, L, T.)

Lösung. Ich ziehe im Abstande von $\frac{p}{2}$ zu L die Parallele und erhalte D. Ich errichte auf T in D das Lot und erhalte C. Ich verlängere CD um sich selbst und erhalte F.

12. Eine Parabel zu zeichnen aus der Lage der Scheiteltangente und der zweier Tangenten. (N, T, T^1.)

Lösung. Zunächst sind D und D^1 bekannt. Ich errichte auf T in D und auf T^1 in D^1 die Lote und erhalte F. Ich verlängere FD um sich selbst und erhalte C. Ich verlängere FD^1 um sich selbst und erhalte C^1. CC^1 ist die Leitlinie.

13. Eine Parabel zu zeichnen aus der Lage der Scheiteltangente und der einer Tangente mit ihrem Berührungspunkte. (N, T mit P.)

Lösung. Durch N und T ist D bekannt. Ich errichte auf T in D das Lot und fälle von P auf N das Lot. Hierdurch finde ich C. Ich errichte auf PC in C das Lot und erhalte L. Ich verlängere CD um sich selbst und erhalte F.

14. Eine Linie, welche durch den Brennpunkt einer Parabel geht, einer ihrer Schnittpunkte mit dieser Kurve und die Scheiteltangente sind der Lage nach gegeben. Die Parabel ist zu zeichnen. (Lage von PF mit P, N.)

Lösung. Ich fälle von P auf N das Lot und halbiere den Winkel zwischen dem Lote und der Linie PF, dann ist D bekannt. Ich errichte auf DP in D das Lot und erhalte F und C. Ich errichte auf PC in C das Lot und erhalte L.

15. Eine Parabel zu zeichnen aus der Lage des Scheitels und der einer Tangente mit ihrem Berührungspunkte. (O, T mit P.)

Lösung. Verbinde ich O mit P und ziehe ich durch D zur Achse die Parallele, so wird OP halbiert. Ich verbinde O mit P, halbiere OP in Q und schlage über OQ den Halbkreis, der T in D trifft. Ich verbinde D mit O und errichte auf OD in O das Lot. Ich errichte auf T in D das Lot und erhalte F. Ich verlängere FD um sich selbst und erhalte C. Ich errichte auf PC in C das Lot und erhalte L.

16. Zieht man durch die Mitte der Parabelsehne PP^1 die Parallele zur Achse, so trifft diese die Parabel in K. Die Parabel ist aus der Lage der Punkte P, P^1 und K zu zeichnen. (P, P^1. K.)

Lösung. Ich halbiere PP^1 in E und verbinde E mit K. Ich verlängere KE um sich selbst und erhalte R. Ich verbinde R mit P und P^1 und trage den Winkel PRE an RP^1 in R an, wodurch ich eine Bedingung für F erhalte. Ich ziehe durch P zu RE die Parallele und trage den Winkel CPR an RP in P an und erhalte F. Ich fälle von F auf RP das Lot und erhalte C. Ich errichte auf PC in C das Lot und erhalte L.

17. Eine Parabel zu zeichnen aus der Lage des Parabelscheitelpunktes, der einer Tangente und ihres Schnittpunktes mit der Achse. (O, T mit S.)

Lösung. Ich verbinde S mit O und errichte auf SO in O das Lot, wodurch ich D erhalte. Ich errichte auf T in D das Lot und erhalte F. Ich verlängere FD um sich selbst und erhalte C. Ich fälle von C auf SO das Lot und erhalte L.

18. Eine Parabel zu zeichnen aus der Lage der Achse und der zweier Kurvenpunkte. (Lage von AF, P und P^1.)

Lösung. Fälle ich von P und P^1 die Lote auf die Achse, so ist $y^2 = 2px$ und $y_1^2 = 2px_1$ also $y^2 : y_1^2 = x : x_1$. Nun verhält sich $x : x_1 = wP : wP^1$ also $y^2 : y_1^2 = wP : wP^1$. Im rechtwinkligen Dreieck verhalten sich aber die Quadrate der Katheten wie die anliegenden Höhensegmente der Hypotenuse. Zeichne ich also ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten y und y_1, so ist das Verhältnis $y^2 : y_1^2$ auf das zweier Strecken zurückgeführt. Somit kann ich w, d. h. einen Punkt der Scheiteltangente finden. Ich fälle von w auf die Achse das Lot und erhalte O. Ich verbinde O mit P und halbiere OP in Q. Ich schlage über OQ den Halbkreis und erhalte D. Ich verbinde D mit P und errichte auf DP in D das Lot, wodurch ich F erhalte. Ich verlängere FD um sich selbst und erhalte C. Ich errichte auf PC in C das Lot und erhalte L.

19. Eine Parabel zu zeichnen aus der Lage der Achse und der einer Parabeltangente mit ihrem Berührungspunkte. (Lage von A F, T mit P.)

Lösung. Ich ziehe durch P zur Achse die Parallele und trage den Winkel C P D an P D in P an, wodurch ich F erhalte. Ich fälle von F auf T das Lot und erhalte D und damit C. Ich fälle von C auf die Achse das Lot und erhalte L.

20. Eine Parabel zu zeichnen aus der Richtung der Achse, der Lage einer Tangente, der ihres Berührungspunktes und ihres Schnittpunktes mit der Scheiteltangente. (Richtung von A F, T mit P und D.)

Lösung. Ich ziehe durch P zur Richtung von A F die Parallele und trage den Winkel C P D an T in P an; diese Linie geht durch F. Ich errichte auf T in D das Lot und erhalte F und C. Ich errichte auf P C in C das Lot und erhalte L.

21. Eine Parabel zu zeichnen aus der Lage der Achse, der eines Kurvenpunktes und der Länge des Parameters. (Lage von A F und P, p.)

Lösung. Ich fälle von P auf die Achse das Lot, so ist $y^2 = 2\,p\,x$; hieraus kann ich mir x konstruieren. Ich ziehe durch P zur Achse die Parallele und schlage um P mit $x + \frac{p}{2}$ den Kreis, wodurch ich C und F erhalte. Ich fälle von C auf die Achse das Lot und erhalte L.

22. Eine Parabel zu zeichnen aus der Lage zweier Kurvenpunkte, dem Verhältnis der zugehörigen Radienvektoren und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel. (P, P^1, $PF : P^1F = 5 : 3$, Winkel PFP^1.)

Lösung. Ich schlage über PP^1 den Kreisbogen, welcher den Winkel PFP^1 als Peripheriewinkel faßt. Ich teile PP^1 innen und außen im Verhältnis von 5 : 3 und schlage den apollonischen Halbkreis. Hierdurch ist F bekannt. Die weitere Lösung ergiebt sich aus Nr. 1.

23. Eine Parabel zu zeichnen aus der Lage zweier Tangenten mit ihrem Berührungspunkte. (T mit P, T^1 mit P^1.)

Lösung. Ich halbiere PP^1 in E und verbinde E mit R. Ich trage den Winkel P R E an P^1R in R an und erhalte eine Bedingung für F. Ich ziehe durch P zu R E die Parallele und trage den Winkel C P R an P R in P an und erhalte F. Ich fälle von F auf T das Lot und erhalte C. Ich errichte auf C P in C das Lot und erhalte L.

24. Eine Parabel zu zeichnen, welche die Seiten A B und A C des Dreiecks A B C in B und C berührt.

Diese Aufgabe ist mit der vorigen identisch, nur der Wortlaut ist ein anderer.

25. Eine Parabel zu zeichnen aus der Lage einer Tangente mit ihrem Berührungspunkte und der Lage des Fußpunktes für das Lot, welches ich von P auf die Leitlinie fälle. (T mit P, C.)

Lösung. Ich verbinde P mit C und trage den Winkel R P C an T in P an. Ich schlage um P mit P C den Kreis und erhalte F. Ich errichte auf P C in C das Lot und erhalte L.

26. Ziehe ich durch den Schnittpunkt der Tangenten R P und RP^1 die Parallele zur Achse, so schneidet sie die Leitlinie in G. Aus der Lage der Punkte P, P^1 und G soll die Parabel gezeichnet werden. (P, P^1, G.)

Lösung. Ich halbiere PP^1 in E und verbinde E mit G. Ich errichte auf E G in G das Lot und erhalte L. Die weitere Lösung folgt aus Nr. 7.

27. Eine Parabel zu zeichnen aus der Länge des Parameters und aus der Lage einer Tangente mit ihrem Berührungspunkte und ihrem Schnittpunkte mit der Scheiteltangente. (p, T mit P und D.)

Lösung. In dem Dreieck DPC kenne ich die Kathete DP und das nicht anliegende Höhensegment gleich $\frac{p}{2}$. Aus der Gleichung $PD^2 = x\,(x + \frac{p}{2})$ kann ich x konstruieren. Ich errichte auf T in D das Lot und schlage um P mit $x + \frac{p}{2}$ den Kreis, wodurch ich C und F finde. Ich errichte auf PC in C das Lot und erhalte L.

Die nächsten 4 Aufgaben sind im Osterprogramm 1879 des Kgl. Realgymnasiums auf der Burg zu Königsberg i. P. behandelt. Ich führe sie deshalb ganz kurz an. In meiner Figur I bedeutet R den Pol und die Lage der Linie PP^1 die Polare.

28. Eine Parabel zu zeichnen aus der Lage von Pol, Polare und Brennpunkt.

Lösung. Ich verbinde R mit F und erhalte U. P, P^1, U und V sind 4 harmonische Punkte. FU ist Winkelhalbierungslinie im Dreieck PFP^1, also UF senkrecht auf FV. Ich errichte auf UF in F das Lot und erhalte V. Ich schlage über RV den Halbkreis und erhalte eine Bedingung für G. Das Lot von F auf die Polare gefällt geht durch G, also G bekannt und damit L.

29. Eine Parabel zu zeichnen aus der Lage von Pol, Polare und Leitlinie.

Lösung. Ich fälle von R auf die Leitlinie das Lot und erhalte G. Ich fälle von G das Lot auf die Polare und erhalte Z und eine Bedingung für F. Ich schlage über RV als Durchmesser den Halbkreis und erhalte F.

30. Eine Parabel zu zeichnen aus der Lage von Pol, Polare und Scheiteltangente.

Lösung. Ich fälle von R auf N das Lot und erhalte E. Ich halbiere RE und erhalte K. Ich ziehe durch K zu der Polare die Parallele, so ist sie eine Tangente. Ich trage den Winkel H^1KG an KH^1 in K an und erhalte eine Bedingung für F. Ich errichte auf HH^1 im Schnittpunkte mit der Scheiteltangente das Lot und erhalte F. Ich fälle von F auf N das Lot und erhalte O. Ich schlage OA = OF ab, errichte auf OA in A das Lot und erhalte L.

31. Eine Parabel zu zeichnen aus der Lage von Pol, Polare und Achse.

Lösung. Ich ziehe durch R die Parallele zur Achse und erhalte E. Ich halbiere RE und erhalte K. Ich ziehe durch K die Parallele zur Polare, so erhalte ich eine Tangente, welche die Achse schneidet. Die Mitte zwischen diesem Schnittpunkte und K ist ein Punkt der Scheiteltangente. Das in diesem Punkte auf HH^1 errichtete Lot geht durch F, also F bekannt. KF = KG, also G bekannt und damit L.

II. Ellipsenaufgaben.

Figur II.

1. Eine Ellipse zu zeichnen aus der Lage der beiden Brennpunkte und der einer Tangente. (F, F^1, T.)

Analysis. F und F^1 seien die Brennpunkte, A und A^1 die Endpunkte der großen Achse für die gesuchte Ellipse, an welcher ich die Lage der Punkte F und F^1 und der Tangenten T kenne. Fälle ich von F auf T das Lot, so ist C bekannt. Halbiere ich F, F^1, so ist O bekannt. Schlage ich um O mit OC den Kreis, so erhalte ich die Punkte A und A^1. Aus F, F^1, A und A^1 kann ich die Ellipse zeichnen.

Konstruktion. Ich halbiere F, F^1 in O, fälle von F auf T das Lot FC und schlage um O mit OC den Kreis, welcher FF^1 in A und A^1 trifft. Aus F, F^1, A und A^1 zeichne ich die Ellipse.

Beweis. Nach Konstruktion sind F und F^1 die Brennpunkte der Ellipse, A und A^1 die Endpunkte ihrer großen Achse. Nach Konstruktion ist OC = OA und FC senkrecht auf T, folglich ist T eine Tangente.

2. Eine Ellipse zu zeichnen aus der Lage zweier Brennpunkte und der eines Kurvenpunktes. (F, F^1, P.)

Lösung. Ich verbinde die drei Punkte untereinander und halbiere FF^1 in O. Ich verlängere F^1P um PF bis G. Ich halbiere F^1G und schlage um O mit $^1/_2$ F^1G den Kreis, welcher FF^1 in A und A^1 trifft.

3. Eine Ellipse zu zeichnen aus der Lage der Achse mit einem Brennpunkte und der zweier Tangenten. (Lage von AA^1 mit F, T und T^1.)

Lösung. Ich verbinde F mit R und trage den Winkel P^1RF an PR in R an; dann erhalte ich F^1. Ich halbiere FF^1 in O und fälle von F auf T das Lot FC. Ich schlage um O mit OC den Kreis und erhalte A und A^1.

4. Eine Ellipse zu zeichnen aus der Länge der kleinen Achse, der Lage eines Endpunktes der großen Achse und der eines Brennpunktes. (b, A. F.)

Lösung. Ich errichte auf AF in A das Lot und trage darauf AE = b ab. Ich verbinde E mit F und trage den Winkel EFA an EF in F an, so erhalte ich eine Bedingung für B^1. Ich ziehe durch E zu AF die Parallele und erhalte B^1. Ich fälle von B^1 auf AF das Lot und erhalte O und damit F^1 und A^1. (EA und EB^1 sind Tangenten.)

5. Eine Ellipse zu zeichnen, wenn der Punkt C, der Brennpunkt F^1 und der Schnittpunkt der großen Achse und der Tangente der Lage nach gegeben sind. (F^1, C, S.)

Lösung. Ich verbinde S mit C und F^1. Ich errichte auf SC in C das Lot und erhalte F. Ich halbiere FF^1 in O und schlage um O mit OC den Kreis, wodurch ich A und A^1 erhalte.

6. Eine Ellipse zu zeichnen aus der Lage von F^1, G und der einer Tangente T. (F^1, G, T.)

Lösung. Ich verbinde F^1 mit G und fälle von G auf T das Lot GC, das ich um sich selbst verlängere. Ich erhalte F, halbiere FF^1 in O und schlage um O mit OC den Kreis, der FF^1 in A und A^1 trifft.

7. Eine Ellipse zu zeichnen aus der Lage der Punkte F, A und G.

Lösung. Ich verbinde F mit A und G. Ich halbiere GF in C und errichte auf AC die Mittelsenkrechte, welche AF in O trifft. Hiermit sind A^1 und F^1 bekannt.

8. Eine Ellipse zu zeichnen aus der Lage der Punkte F, P und S.

Lösung. Ich verbinde die 3 Punkte unter einander und trage den Winkel SPF an TP in P an, dann erhalte ich F^1. Ich halbiere FF^1 in O, fälle von F auf SP das Lot und schlage um O mit OC den Kreis, der FF^1 in A und A^1 trifft.

9. Eine Ellipse zu zeichnen aus der Lage der Punkte A, F und P.

Lösung. Ich verbinde F mit A und P und halbiere den Winkel AFP. Ich errichte auf AF in A das Lot und erhalte J. Ich verbinde J mit P und trage den Winkel JPF an PT in P an; ich erhalte F^1. Ich schlage F^1A^1 = FA ab.

10. Eine Ellipse zu zeichnen aus der Länge der großen Achse, der Lage eines Brennpunktes und der zweier Tangenten. (F, T, T^1, 2 a)

Lösung. Ich fälle von F auf T und T^1 die Lote, welche ich um sich selbst verlängere; dann erhalte ich G und G^1. Ich schlage um G und G^1 mit 2 a Kreise und erhalte F^1. FF^1 halbiere ich in O und schlage um O mit a den Kreis, welcher FF^1 in A und A^1 trifft.

11. Eine Ellipse zu zeichnen aus der Lage von A, F und C.

Lösung. Ich verbinde A mit F und C. Ich errichte auf AC die Mittelsenkrechte und erhalte O und damit A^1 und F^1.

12. Eine Ellipse zu zeichnen aus der Lage von A, F und T.

Lösung. Ich fälle von F auf T das Lot und erhalte C. Ich habe dann A, F und C, also Aufgabe 11.

13. Eine Ellipse zu zeichnen aus der Lage der Achse mit dem Brennpunkt und der einer Tangente mit ihrem Berührungspunkte. (Lage von AA^1 mit F, T mit P.)

Lösung. Ich fälle von F auf T das Lot FC und verbinde F mit P. Den Winkel CPF trage ich an TP in P an und erhalte F^1. FF^1 halbiere ich in O und schlage um O mit OC den Kreis, der FF^1 in A und A^1 trifft.

14. Eine Ellipse zu zeichnen aus der Lage des Brennpunktes, der einer Tangente mit ihrem Berührungspunkte und der eines zweiten Kurvenpunktes. (F, T mit P, P^1.)

Lösung. Ich verbinde F mit P und P^1 und halbiere den Winkel PFP^1, wodurch ich R erhalte. Ich trage den Winkel P^1RF an PR in R an und erhalte eine Bedingung für F^1. Ich fälle von F auf T das Lot FC, verlängere FC um sich selbst bis G und verbinde G mit P; dann ist F^1 bekannt. Ich halbiere FF^1 in O und schlage um O mit OC den Kreis, welcher FF^1 in A und A^1 trifft.

15. Eine Ellipse zu zeichnen aus der Lage der Punkte F, S und D.

Lösung. Ich verbinde S mit D und F; ich fälle von D auf SF das Lot und erhalte O. Ich fälle von F auf SD das Lot und erhalte C. Ich schlage um O mit OC den Kreis und mit OF den Kreis, wodurch ich A, A^1 und F^1 erhalte.

16. Eine Ellipse zu zeichnen aus der Lage des Brennpunktes, einer Tangente mit ihrem Berührungspunkte und einer zweiten Tangente. (F, T mit P, T^1.)

Lösung. Ich verbinde F mit R und trage den Winkel P^1RF an RP in R an. Ich verbinde F mit P und trage den Winkel RPF an TP in P an und erhalte F^1. Ich halbiere FF^1 in O, fälle von F auf T das Lot FC und schlage um O mit OC den Kreis, welcher FF^1 in A und A^1 trifft.

17. Eine Ellipse zu zeichnen aus der Lage der Punkte F, P, B^1.

Lösung. Ich schlage um B^1 mit B^1F den Kreis und um P mit $2B^1F - PF$, so erhalte ich F^1. Ich halbiere FF^1 in O und schlage um O mit B^1F den Kreis, welcher FF^1 in A und A^1 schneidet.

18. Eine Ellipse zu zeichnen aus der Lage von F, T mit P und der Länge e. ($OF = e$).

Lösung. Ich fälle von F auf T das Lot FC und verlängere es um sich selbst bis G. Ich verbinde G mit P und schlage um F mit 2 e den Kreis; ich erhalte F^1. Ich halbiere FF^1 in O und schlage um O mit OC den Kreis, welcher FF^1 in A und A^1 schneidet.

19. Eine Ellipse zu zeichnen aus der Lage von F, T mit P und der Richtung der kleinen Achse.

Lösung. Ich fälle von F auf die Richtung der kleinen Achse das Lot. Ich fälle von F auf T das Lot F C. Ich verbinde F mit P und trage den Winkel C P F an T P in P an und erhalte F^1. Ich halbiere $F F^1$ in O und schlage um O mit O C den Kreis, der $F F^1$ in A und A^1 schneidet.

20. Eine Ellipse zu zeichnen aus der Lage der Punkte R, P, P^1 und dem Verhältnis $F P : F P^1 = 5 : 3$.

Lösung. Ich verbinde die Punkte R, P, P^1. Ich teile $P P^1$ innen und außen im Verhältnis von 5 : 3 und schlage den apollonischen Halbkreis. Ich verbinde R mit dem inneren Teilpunkt von $P P^1$ und erhalte F. Die weitere Entwicklung folgt aus Nr. 16.

21. Eine Ellipse zu zeichnen aus der Lage der Punkte S, A und ~~O~~. C.

Lösung. Ich verbinde die 3 Punkte und errichte auf A C die Mittelsenkrechte. Ich erhalte O. Ich errichte auf S C in C das Lot und erhalte F. Mit A, F und O habe ich F^1 und A^1.

22. Eine Ellipse zu zeichnen aus der Lage der Punkte S, ~~A und~~ O. C.

Lösung. Ich verbinde S mit C und O. Ich schlage um O mit O C den Kreis und erhalte A und A^1. Ich errichte in C auf S C das Lot und erhalte F. Ich schlage $O F = O F^1$ ab.

23. Eine Ellipse zu zeichnen aus der Lage der Punkte S, G, P.

Lösung. Ich verbinde P mit S und G. Ich fälle von G auf S P das Lot G C und verlängere es um sich selbst bis F. Ich verbinde S mit F und erhalte F^1. Ich halbiere $F F^1$ in O und schlage um O mit O C den Kreis, der S F in A und A^1 trifft.

24. Eine Ellipse zu zeichnen aus der Lage der Punkte A, C und U.

Lösung. Ich verbinde A mit C und U. Ich errichte auf A C die Mittelsenkrechte und erhalte O. Ich schlage um O mit O A den Kreis und erhalte A^1. Ich errichte auf $A A^1$ in U das Lot und erhalte V. Ich ziehe an den Kreis O in V die Tangente und erhalte S. Ich verbinde S mit C und errichte auf S C in C das Lot. Ich erhalte F und schlage $O F = O F^1$ ab.

25. Eine Ellipse zu zeichnen aus der Lage der Punkte A, C und V.

Lösung. Durch A, C und V ist der Punkt O bestimmt, da A, C und V auf der Peripherie desselben Kreises liegen. Ich schlage $O A = O A^1$ ab. Ich ziehe in V an den Kreis O die Tangente und erhalte S. Ich verbinde S mit C und errichte auf S C in C das Lot, welches A O in F trifft. Ich schlage $O F = O F^1$ ab.

26. Eine Ellipse zu zeichnen aus der Lage der Punkte C, O, B^1.

Lösung. Ich verbinde O mit B^1 und errichte auf $O B^1$ in O das Lot. Ich schlage um O mit O C den Kreis und erhalte A und A^1. Ich schlage um B^1 mit O A den Kreis und erhalte F und F^1.

27. Eine Ellipse zu zeichnen aus der Lage von A, O und der Tangente T.

Lösung. Ich verbinde A mit O und schlage um O mit O A den Kreis; dann erhalte ich die Punkte A^1 und C. Ich errichte in C auf T das Lot und erhalte F. Ich schlage $O F = O F^1$ ab.

28. Eine Ellipse zu zeichnen aus der Lage von F, O und der Tangente T.

Lösung. Ich verbinde F mit O und schlage $O F = O F^1$ ab. Ich fälle von F auf T das Lot und erhalte C. Ich schlage um O mit O C den Kreis und erhalte A und A^1.

29. Eine Ellipse zu zeichnen aus der Lage von A, A^1 und der Tangente T.

Lösung. Ich halbiere $A A^1$ in O und schlage um O mit O A den Kreis, wodurch ich C erhalte. Ich errichte auf T in C das Lot und erhalte F. Ich schlage $O F = O F^1$ ab.

30. In einem gegebenen Kreise ist ein Durchmesser gezogen. Es soll eine Ellipse gezeichnet werden, welche diesen Durchmesser zur Achse und eine gegebene Kreissehne zur Tangente hat.

Lösung. Diese Aufgabe ist dieselbe wie Nr. 29, nur mit anderem Wortlaute.

31. Eine Ellipse zu zeichnen aus der Lage der Punkte A, A^1 und P.

Lösung. Ich halbiere AA^1 in O und schlage um O mit OA den Kreis. Ich fälle von P auf AA^1 das Lot und erhalte V. Ich ziehe in V an den Kreis O die Tangente und erhalte S. Ich verbinde S mit P und erhalte C. Ich errichte auf SC in C das Lot und erhalte F. Ich schlage $OF = OF^1$ ab.

32. In einem gegebenen Kreise ist ein Durchmesser gezogen. Es soll eine Ellipse gezeichnet werden, welche diesen Durchmesser zur großen Achse hat und welche durch einen Punkt geht, der innerhalb des Kreises der Lage nach gegeben ist.

Diese Aufgabe ist dieselbe wie Nr. 31 nur mit anderen Worten.

33. Eine Ellipse zu zeichnen aus der Lage von AA^1 mit O und der einer Tangente mit P.

Lösung. Ich schlage über SO als Durchmesser den Halbkreis und fälle von P auf SO das Lot. Ich erhalte V. Ich schlage um O mit OV den Kreis und erhalte die Punkte A, C, A^1. Ich errichte auf SC in C das Lot und erhalte F. Ich schlage $OF = OF^1$ ab.

34. Ein Dreieck zu zeichnen aus c, $a + b$, h_c.

Lösung. Ich zeichne eine Ellipse, bei welcher $FF^1 = c$ und $AA^1 = a + b$ ist. Ich ziehe im Abstande von h_c zu AA^1 die Parallele und erhalte die dritte Ecke des Dreiecks.

35. Ein Dreieck zu zeichnen aus $a + b$, $p - q$, h_c.

Lösung. Ich zeichne eine Ellipse, für welche $FF^1 = p - q$ und $AA^1 = a + b$ ist. Ich ziehe im Abstande von h_c zu AA^1 die Parallele und erhalte die Ecke C. Ich schlage um C mit CF den Kreis und erhalte die dritte Ecke des Dreiecks.

36. Ein Dreieck zu zeichnen aus c, $t_a + t_b$, h_c.

Lösung. Ich zeichne c dreimal neben einander hin und zeichne eine Ellipse, für welche $FF^1 = 3c$ und $AA^1 = 2(t_a + t_b)$ wird. Ich ziehe im Abstande von h_c die Parallele zu AA^1 und erhalte die dritte Ecke des Dreiecks.

37. Ein Dreieck zu zeichnen aus c, $t_a + t_b$, t_c.

Lösung. Ich zeichne eine Ellipse, für welche $FF^1 = 3c$ und $AA^1 = 2(t_a + t_b)$ ist. Ich schlage um O mit t_c den Kreis und erhalte die dritte Ecke des Dreiecks.

38. Ein Dreieck zu zeichnen aus c, $a + b$, t_c.

Lösung. Ich zeichne eine Ellipse, für welche $FF^1 = c$ und $AA^1 = a + b$ ist. Ich schlage um O mit t_c den Kreis und erhalte die dritte Ecke des Dreiecks.

39. Ein Dreieck zu zeichnen aus c, $a + b$, $t_a + t_b$.

Lösung. Ich zeichne 2 Ellipsen, die denselben Mittelpunkt haben. Für die eine ist die Excentricität gleich $\frac{c}{2}$ und die halbe große Achse $\frac{a + b}{2}$; für die andere ist die Excentricität $\frac{3c}{2}$ und die halbe große Achse $t_a + t_b$. Ein Schnittpunkt beider Ellipsen giebt die dritte Ecke des Dreiecks.

40. Ein Trapez zu zeichnen, in welches sich ein allseitig berührender Kreis zeichnen läßt, aus a, c, ϱ.

Lösung. Heißt das Trapez ABCD, und ziehe ich durch C zu AD die Parallele, so ist $EB = a - c$, $CE + CB = AD + CB = AB + CD = a + c$ und die Höhe des Dreiecks 2ϱ. Ich habe also die Aufgabe, ein Dreieck EBC zu zeichnen aus einer Seite, der zugehörigen Höhe und der Summe der beiden anderen Seiten. Diese Aufgabe ist in Nr. 34 gelöst. Nun schlage ich $AE = c$ ab, ziehe durch A zu CE die Parallele und durch C zu AB, so ist ABCD bekannt.

III. Hyperbelaufgaben.

Figur III.

1. Eine Hyperbel zu zeichnen aus der Lage der beiden Asymptoten und der eines Kurvenpunktes. (L, N, P.)

Analysis. F und F^1 seien die Brennpunkte, A und A^1 die Endpunkte der ersten Achse für die gesuchte Hyperbel, von welcher mir die beiden Asymptoten L und N und der Punkt P der Lage nach gegeben sind. Halbiere ich die Winkel, welche die Asymptoten mit einander bilden, so erhalte ich die Lage der Achsen. Fälle ich von P auf die erste Achse das Lot, so ist $PV \,.\, PU = b^2$, also b bekannt. Ziehe ich im Abstande von b zu der ersten Achse die Parallele, so erhalte ich B. Fälle ich von B auf die erste Achse das Lot, so erhalte ich A. Schlage ich um O mit OB den Kreis, so erhalte ich F und F^1. Schlage ich $OA = OA^1$ ab, so ist A^1 bekannt. Aus F, F^1, A und A^1 kann ich die Hyperbel zeichnen.

Konstruktion. Ich halbiere die Winkel, welche die Asymptoten bilden. Ich fälle von P auf die erste Achse das Lot und erhalte U und V. Ich schlage über UV als Durchmesser den Halbkreis und errichte auf UV in P das Lot; ich erhalte b. Ich ziehe im Abstande von b zu der ersten Achse die Parallele und erhalte B. Ich fälle von B auf die erste Achse das Lot und erhalte A. Ich schlage um O mit OB den Kreis und erhalte F und F^1. Ich schlage $OA = OA^1$ ab und zeichne aus F, F^1, A und A^1 die Hyperbel.

Beweis. Nach Konstruktion sind F und F^1 die Brennpunkte, A und A^1 die Endpunkte der ersten Achse. Nach Konstruktion ist $OB = OF$ und BA senkrecht auf OA, also OB eine Asymptote. Nach Konstruktion ist Winkel $BOA = AOV$ also OV die zweite Asymptote. Nach Konstruktion ist $PU \,.\, PV = b^2$ folglich P ein Punkt der Hyperbel.

2. Eine Hyperbel zu zeichnen aus der Lage der Punkte F, F^1 und P.

Lösung. Ich halbiere FF^1 in O und verbinde P mit F und F^1. Ich schlage $PF = PG$ ab und schlage um O mit $\frac{1}{2}\, F^1G$ den Kreis, welcher FF^1 in A und A^1 schneidet.

3. Eine Hyperbel zu zeichnen aus der Lage der Punkte F und F^1 und der Tangente T.

Lösung. Ich halbiere FF^1 in O, fälle von F auf T das Lot FC und schlage um O mit OC den Kreis, welcher FF^1 in A und A^1 trifft.

4. Eine Hyperbel zu zeichnen aus der Lage der Punkte A, F und C.

Lösung. Ich verbinde A mit F und C und errichte auf AC die Mittelsenkrechte, wodurch ich O erhalte. Ich schlage $OA = OA^1$ und $OF = OF^1$ ab.

5. Eine Hyperbel zu zeichnen aus der Lage der Punkte A, F und G.

Lösung. Ich verbinde F mit A und G, halbiere FG in C und habe Aufgabe 4.

6. Eine Hyperbel zu zeichnen aus der Lage der Punkte F, O und G.

Lösung. Ich verbinde F mit O und G. Ich halbiere FG in C und schlage $OA = OA^1 = OC$ ab und $OF = OF^1$.

7. Eine Hyperbel zu zeichnen aus der Lage der Punkte F und A und der Länge der halben zweiten Achse b.

Lösung. Ich verbinde F mit A und errichte auf FA in A das Lot, auf welchem ich $AB = b$ abtrage. Ich verbinde F mit B und errichte auf FB die Mittelsenkrechte, welche FA in O trifft. Hiermit sind A^1 und F^1 bekannt.

8. Eine Hyperbel zu zeichnen aus der Lage der Punkte F und O und der Tangente T.

Lösung. Ich verbinde F mit O und fälle von F auf T das Lot FC. Ich schlage um O mit OC den Kreis und erhalte A. Hiermit sind F^1 und A^1 bekannt.

9. Eine Hyperbel zu zeichnen aus der Lage der Punkte F und A und der Tangente T.

Lösung. Ich verbinde F mit A und fälle von F auf T das Lot FC. Hiermit habe ich Aufgabe 4.

10. Eine Hyperbel zu zeichnen aus der Länge der ersten Achse, der Lage eines Brennpunktes und der einer Tangente mit ihrem Berührungspunkte. (2a, F, T mit P.)

Lösung. Ich verbinde F mit P und trage den Winkel FPC an PC in P an. Ich schlage um P mit $PF + 2a$ den Kreis und erhalte F^1. FF^1 halbiere ich in O. Ich schlage um O mit a den Kreis und erhalte A und A^1.

11. Eine Hyperbel zu zeichnen aus der Lage der Punkte F^1 und G und der Tangente T.

Lösung. Ich verbinde F^1 mit G und fälle von G auf T das Lot GC, das ich um sich selbst verlängere. Ich halbiere FF^1 in O und schlage um O mit $^1/_2$ F^1G den Kreis, wodurch ich A und A^1 erhalte.

12. Eine Hyperbel zu zeichnen aus der Lage der ersten Achse mit F und der zweier Tangenten. (Lage von AA^1 mit F, T, T^1.)

Lösung. Ich verbinde R mit F und trage den Winkel FRP^1 an RD in R an und erhalte F^1. Ich halbiere FF^1 in O. Ich fälle von F auf T das Lot und erhalte C. Ich schlage $OA = OA^1 = OC$ ab.

13. Eine Hyperbel zu zeichnen aus der Lage der Punkte F, A und P.

Lösung. Ich errichte in A auf AF das Lot und halbiere den Winkel PFA; dann erhalte ich x. Ich fälle von F auf Px das Lot und erhalte C. Damit habe ich Aufgabe 4.

14. Eine Hyperbel zu zeichnen aus der Lage von F, der Tangente T und einer Asymptote L.

Lösung. Ich ziehe durch F zu der Asymptote L die Parallele, dann ist diese zugleich die Verbindungslinie des Brennpunktes mit dem Berührungspunkte der Asymptote, die auch eine Tangente ist. Mithin ist Winkel $WFE = EFP$, also P bekannt. $EP = PE^1$ also E^1 bekannt. Ich fälle von F auf die Asymptote das Lot und schlage damit einen Kreis um F. Ich ziehe von E^1 die Tangente an diesen Kreis und erhalte O. Ich verbinde F mit O und schlage um O mit OF den Kreis, durch welchen ich B erhalte. Ich fälle von B auf FO das Lot und erhalte A. Durch F, A, O sind auch A^1 und F^1 bekannt.

15. Eine Hyperbel zu zeichnen aus der Lage der Punkte P und F und der einer Asymptote.

Lösung. Ich ziehe durch F die Parallele zur Asymptote und halbiere den Winkel WFP. Damit habe ich E und die Tangente T, also die vorige Aufgabe.

16. Eine Hyperbel zu zeichnen aus der Lage beider Asymptoten und der einer Tangente.

Lösung. Ich halbiere EE^1 in P und habe dann Aufgabe 1.

17. Eine Hyperbel zu zeichnen aus der Lage beider Asymptoten und der Länge der Excentricität.

Lösung. Ich halbiere die Winkel, welche die Asymptoten bilden und schlage um O mit e den Kreis, so erhalte ich die Punkte F, B, F^1. Ich fälle von B das Lot auf die erste Achse und erhalte A und damit A^1.

18. Eine Hyperbel zu zeichnen aus der Lage zweier Kurvenpunkte P und P^1, der einer Asymptote und dem Winkel $HOH^1 = 2\varphi$.

Lösung. Ich verbinde P mit P^1 und trage $PH = P^1H^1$ ab. Ich ziehe durch H^1 eine Linie, welche mit der Asymptote L den Winkel 2φ bildet und erhalte O. Hiermit komme ich auf Aufgabe 1.

19. Eine Hyperbel zu zeichnen aus der Lage einer Asymptote, einer Tangente mit ihrem Berührungspunkte und dem Winkel $EOE = 2\varphi$.

Lösung. Ich schlage $PE = PE^1$ ab und ziehe durch E^1 eine Linie, welche mit der Asymptote L den Winkel 2φ bildet. Dann erhalte ich O und komme auf Aufgabe 1.

20. Eine Hyperbel zu zeichnen aus der Lage einer Asymptote, einer Tangente mit ihrem Berührungspunkte und der eines zweiten Kurvenpunktes P^1. (Lage von L, T mit P, P^1.)

Lösung. Ich verbinde P mit P^1 und trage $PH = P^1H^1$ ab. Ich schlage $PE = PE^1$ ab und verbinde H^1 mit E^1. Hiermit habe ich O und damit Aufgabe 1.

21. Eine Hyperbel zu zeichnen aus der Lage der Punkte A und P und der einer Asymptote L.

Lösung. Ich verbinde A mit P, erhalte den Schnittpunkt auf L und damit einen Punkt auf N. Ich fälle von A auf L das Lot und schlage um A mit der Länge des Lotes den Kreis. Ich ziehe von dem auf N gefundenen Punkte an diesen Kreis eine Tangente und erhalte O. Die Aufgabe ist damit auf Nr. 1 zurückgeführt.

22. Eine Hyperbel zu zeichnen aus der Lage einer Asymptote L, der Tangente T mit P und S. (S ist der Schnittpunkt der Tangente mit der Achse.)

Lösung. Ich fälle von S auf die Asymptote das Lot und schlage um S mit der Länge des Lotes den Kreis. Ich trage $EP = PE^1$ ab und ziehe von E^1 an den Kreis eine Tangente N. Hiermit habe ich O. Die Aufgabe ist auf Nr. 1 zurückgeführt.

23. Eine Hyperbel zu zeichnen aus der Lage einer Asymptote und der Schnittpunkte einer Tangente mit beiden Asymptoten. (Lage von L, S, D.)

Lösung. Ich schlage über SD als Durchmesser den Halbkreis und erhalte O. Ich fälle von S auf L das Lot und schlage um S mit der Länge des Lotes den Kreis; von O aus ziehe ich an ihn eine Tangente und erhalte N. Hiermit komme ich auf Aufgabe 16.

24. Eine Hyperbel zu zeichnen aus der Lage der Punkte A und A^1 und der einer Tangente T.

Lösung. Ich halbiere AA^1 in O und schlage um O mit OA den Kreis, dann erhalte ich C. Ich errichte in C auf T das Lot und erhalte F und damit F^1.

25. Eine Hyperbel zu zeichnen aus der Lage der Punkte A und O und der einer Tangente T.

Lösung. Ich trage $AO = AO^1$ ab und habe Aufgabe 24.

26. Eine Hyperbel zu zeichnen aus der Lage der Punkte A, C und S.

Lösung. Ich verbinde die 3 Punkte untereinander und errichte auf AC die Mittelsenkrechte, wodurch ich O erhalte. Ich errichte auf SC in C das Lot und erhalte F. Durch A, O und F sind A^1 und F^1 bekannt.

27. Ein Dreieck zu zeichnen aus c, $a - b$, h_c.

Lösung. Ich zeichne eine Hyperbel, für welche $FF^1 = c$ und $AA^1 = a - b$ ist. Ich ziehe im Abstande von h_c zu AA^1 die Parallele und erhalte die dritte Ecke des Dreiecks.

28. Ein Dreieck zu zeichnen aus c, $a - b$, t_c.

Lösung. Ich zeichne eine Hyperbel, für welche $FF^1 = c$ und $AA^1 = a - b$ ist. Ich schlage um O mit t_c den Kreis und erhalte die dritte Ecke des Dreiecks.

29. Ein Dreieck zu zeichnen aus $p - q$, $a - b$, h_c.

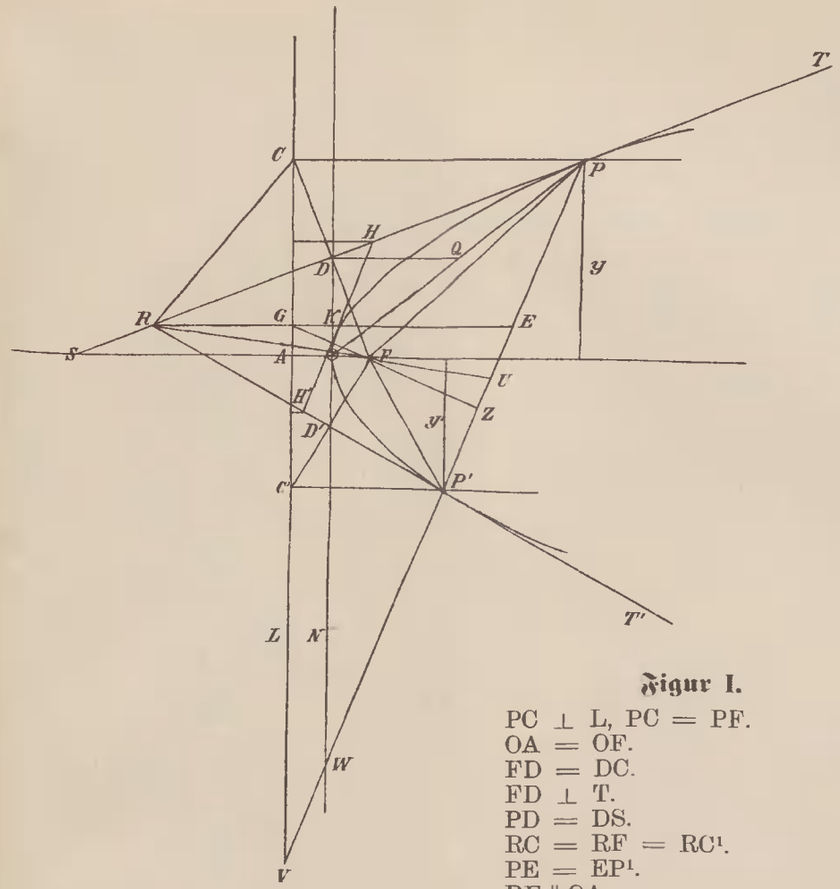
Lösung. Ich zeichne eine Hyperbel, für welche $FF^1 = p - q$ und $AA^1 = a - b$ ist. Ich ziehe im Abstande von h_c zu AA^1 die Parallele und erhalte die zweite Ecke des Dreiecks, die ich P nenne. Ich schlage um P mit PF den Kreis und erhalte die dritte Ecke des Dreiecks.

30. Ein Dreieck zu zeichnen aus c, $a - b$, $t_a + t_b$.

Lösung. Ich zeichne eine Hyperbel mit dem Mittelpunkt O, für welche $FF^1 = c$ und $AA^1 = a - b$ ist. Ich zeichne eine Ellipse mit demselben Mittelpunkt O und derselben Lage der Achsen, für welche der Abstand der Brennpunkte $3\,c$ und die große Achse $2\,(t_a + t_b)$ ist. Ein Schnittpunkt der Kurven ergiebt die dritte Ecke des Dreiecks.

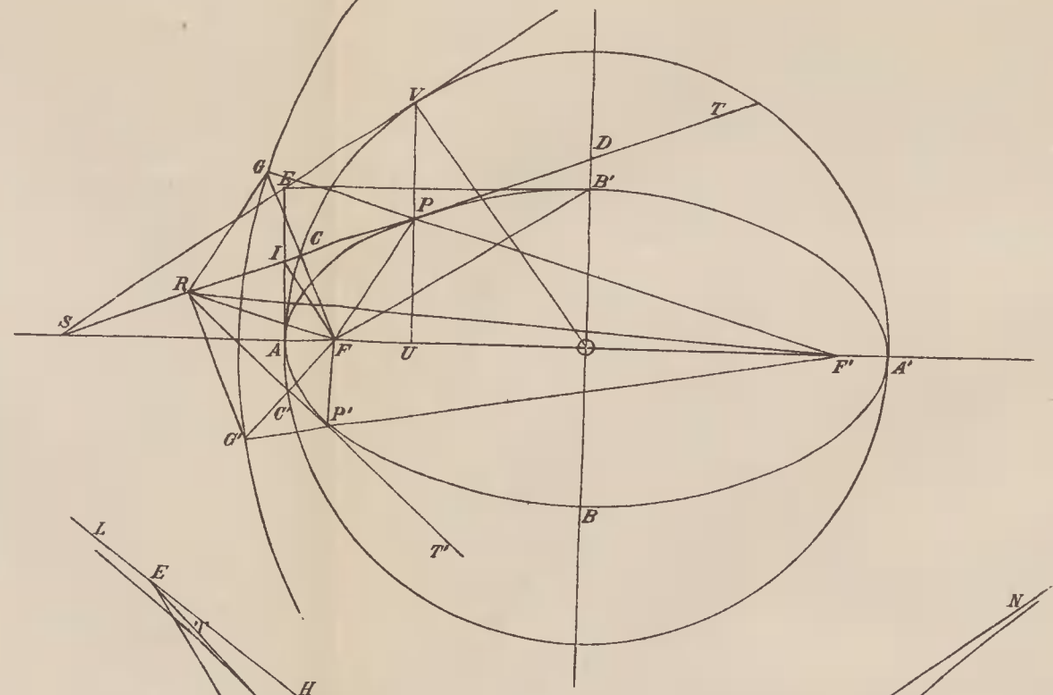
Katedra Fotogrametrii i Informatyki Przestrzennej
2204
18.12.2008

Erklärungen und Sätze



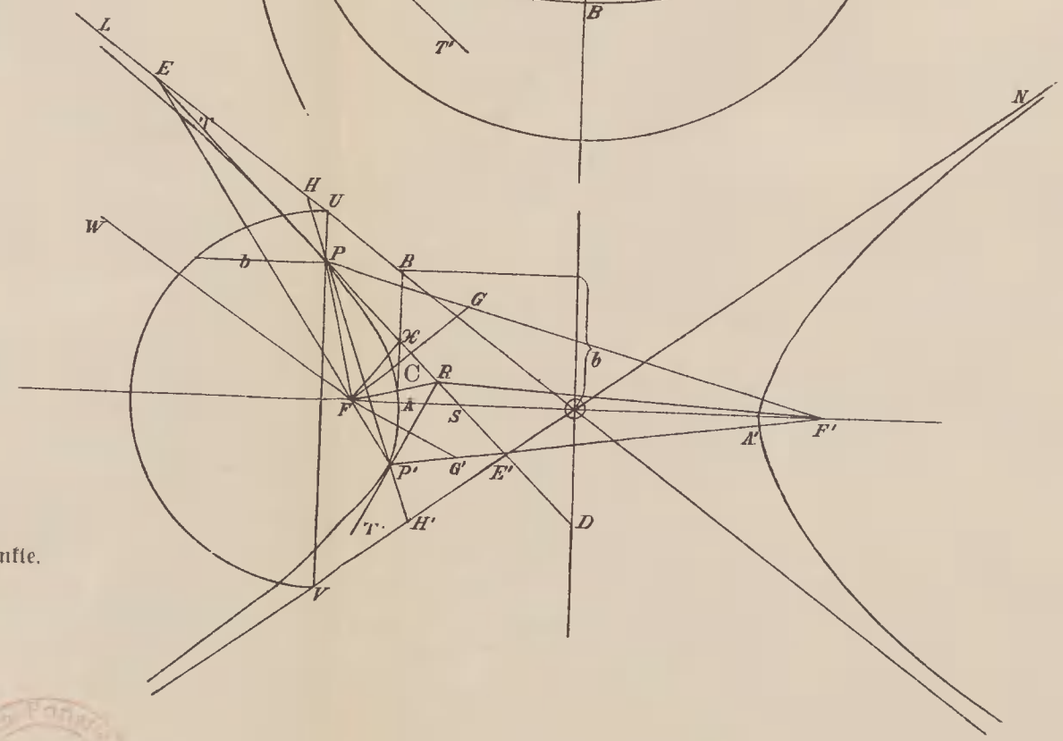
Figur I.

PC ⊥ L, PC = PF.
OA = OF.
FD = DC.
FD ⊥ T.
PD = DS.
RC = RF = RC¹.
PE = EP¹.
RE ∥ OA.
RH = HP.
RK = KE.
HH¹ ∥ PP¹.
GF ⊥ PP¹.
∢CPD = FPD.
∢RFP = RFP¹.
∢PRE = P¹RF.
P, P¹, U und V 4 harmonische Punkte.



Figur II.

AA¹ = FP + PF¹ = 2a.
PG = PF.
F¹G = 2a.
RF = RG = RG¹.
FC = CG.
OC = a.
FC ⊥ T.
∢RPF = F¹PD.
∢RFP = RFP¹.
∢PRF¹ = P¹RF.
VP ⊥ AA¹.
Ellipseninhalt = abπ.



Figur III.

AA¹ = PF¹ — PF = 2a.
PF = PG.
GF¹ = 2a.
FC ⊥ T.
OC = a.
UP . PV = b².
HP = H¹P¹.
EP = PE¹.
∢FPC = ∢CPF¹.
∢FRP¹ = DRF¹.
∢PFR = P¹FR.

BIBLIOTEKA
Archiwum Państwowe
w Koszalinie
2377p